الجبر 4: الترتيب و العمليات

I. مقارنة عددين حقيقيين:

قاعدة أساسية:

لمقارنة عددين حقيقيين a و b ندرس إشارة فرقهما $a-b$.

- $a-b\geq 0$ تعني: $a\geq b$.
- $a-b\leq 0$ تعني: $a\leq b$.

II. الترتيب و العمليات:

1. الجمع:

a و b و c أعداد حقيقية.

- $a\leq b$ تعني: $a+c\leq b+c$.
- $a\leq b$ تعني: $a-c\leq b-c$.

2. الضرب:

- إذا كان $a\leq b$ و c موجب، فإن: $a\times c\leq b\times c$.
- إذا كان $a\leq b$ و c سالب، فإن: $a\times c\geq b\times c$.
- إذا كان $a\leq b$ و c موجب قطعا، فإن: $\frac{a}{c}\leq\frac{b}{c}$.
- إذا كان $a\leq b$ و c سالب قطعا، فإن: $\frac{a}{c}\geq\frac{b}{c}$.

نتيجة:

a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة.

- إذا كان $\begin{cases}a\leq b\\c\leq d\end{cases}$، فإن: $a\times c\leq b\times d$.

3. المقلوب:

a و b عددان حقيقيان غير منعدمان لهما نفس الإشارة.

- $a\leq b$ تعني: $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$.

4. المربع:

a و b عددان حقيقيان.

- إذا كان a و b موجبان، فإن: $a\leq b$ تعني: $a^2\leq b^2$.
- إذا كان a و b سالبان، فإن: $a\leq b$ تعني: $a^2\geq b^2$.

5. الجذر المربع:

a و b عددان حقيقيان موجبان.

- $a\leq b$ تعني: $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$.

III. التأطير:

تعريف:

a و b و x أعداد حقيقية حيث: $a\leq b$.

الكتابة $a\leq x\leq b$ تسمى تأطيرا للعدد x.

1. تأطير المجموع:

a و b و c و d و x و y أعداد حقيقية.

- إذا كان $\begin{cases}a\leq x\leq b\\c\leq y\leq d\end{cases}$، فإن: $a+c\leq x+y\leq b+d$.

2. تأطير الجداء:

a و b و c و d و x و y أعداد حقيقية موجبة.

- إذا كان $\begin{cases}a\leq x\leq b\\c\leq y\leq d\end{cases}$، فإن: $a\times c\leq x\times y\leq b\times d$.