تصحيح الاختبار الموحد المحلي في مادة الرياضيات : دورة 19 يناير 2009

التمرين الأول

1. لدينا $A=\sqrt{20}-12\sqrt{5}+2\sqrt{125}$

أي $A=\sqrt{4\times5}-12\sqrt{5}+2\sqrt{25\times5}$

أي $A=\sqrt{2^2\times5}-12\sqrt{5}+2\sqrt{5^2\times5}$

أي $A=2\sqrt{2}-12\sqrt{5}+10\sqrt{5}$

أي $A=-10\sqrt{5}+10\sqrt{5}$

إذن $A=0$

2. لنبين أن $B=3$

لدينا $B=\dfrac{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}-\dfrac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

أي $B=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}-\dfrac{6\sqrt{3}}{3}$

أي $B=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{4-3}-\dfrac{{}^{2}\cancel{6}\sqrt{3}}{{}_{1}\cancel{3}}$

أي $B=2\sqrt{3}+3-2\sqrt{3}$

إذن $B=3$

3. .

أ. لنقارن 5 و $2\sqrt{6}$. لنقارن أولا 5^2 و $\left(2\sqrt{6}\right)^2$

$5^2=25$ و $\left(2\sqrt{6}\right)^2=4\times6=24$ إذن $\left(2\sqrt{6}\right)^2\le5^2$ ومنه فإن $2\sqrt{6}\le5$

ب. $\left(2\sqrt{6}-5\right)^2=\left(2\sqrt{6}\right)^2-2\times2\sqrt{6}\times5+5^2=24-20\sqrt{6}+25=49-20\sqrt{6}$

ج. $\sqrt{49-20\sqrt{6}}+2\sqrt{6}=\sqrt{\left(2\sqrt{6}-5\right)^2}+2\sqrt{6}=\sqrt{\left(5-2\sqrt{6}\right)^2}+2\sqrt{6}=5-2\sqrt{6}+2\sqrt{6}=5$

4.

$$C=\frac{(0,002)^3\times10^{-3}-0,0018\times\left(10^{-2}\right)^4}{4000000}$$

$$C=\frac{\left(2\times10^{-3}\right)^3\times10^{3}-1,8\times10^{-3}\times10^{-8}}{4\times10^6}$$

$$C=\frac{8\times10^{-12}-1,8\times10^{-11}}{4\times10^6}$$

$$C=\frac{0,8\times10^{-11}-1,8\times10^{-11}}{4\times10^6}$$

$$C=\frac{(0,8-1,8)\times10^{-11}}{4\times10^6}$$

$$C=\frac{-10^{-11}}{4\times10^6}=-\frac{1}{4}\times10^{-17}=-0,25\times10^{-17}=-2,5\times10^{-18}$$

التمرين الثاني

.1

$$E=(3x+5)(2x-1)-9x^2+25$$
$$E=6x^2-3x+10x-5-9x^2+25$$
$$E=-3x^2+7x+25$$

.2 لنُعمِّـل E

$$E=(3x+5)(2x-1)-9x^2+25$$
$$E=(3x+5)(2x-1)-(9x^2-25)$$
$$E=(3x+5)(2x-1)-\left((3x)^2-5^2\right)$$
$$E=(3x+5)(2x-1)-(3x+5)(3x-5)$$
$$E=(3x+5)(2x-1-(3x-5))$$
$$E=(3x+5)(2x-1-3x+5)$$
$$E=(3x+5)(-x+4)$$

.3

أ. لنبين أن $2\le x\le 6$

لدينا $3\le\sqrt{4x+1}\le 5$

أي $3^2\le\left(\sqrt{4x+1}\right)^2\le 5^2$

أي $9\le 4x+1\le 25$

أي $9-1\le 4x+1-1\le 25-1$

أي $8\le 4x\le 24$

أي $\frac{8}{4}\le\frac{4x}{4}\le\frac{24}{4}$

إذن $2\le x\le 6$

ب. لنؤطر $x-y$. نُؤطر أولا $-y$: لدينا $-5\le y\le -2$ أي $2\le -y\le 5$ إذن $\boxed{4\le x-y\le 11}$.

لنؤطر xy :

لدينا $2\le x\le 6$ و $2\le -y\le 5$ إذن $4\le -xy\le 30$ أي $\boxed{-30\le xy\le -4}$

لنؤطر $\frac{x}{y}$:

نُؤطر أولا $\frac{1}{y}$. $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{y}\le-\frac{1}{5}$ أي $\frac{1}{5}\le-\frac{1}{y}\le\frac{1}{2}$. إذن $\frac{2}{5}\le-\frac{x}{y}\le\frac{6}{2}$ أي $\boxed{-3\le\frac{x}{y}\le-\frac{2}{5}}$

ج. لدينا $3\le\sqrt{4x+1}\le 5$ أي $\frac{1}{5}\le\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\le\frac{1}{3}$ (1)

و $2\le -y\le 5$ أي $\sqrt{2}\le\sqrt{-y}\le\sqrt{5}$ (2)

إذن $(1)\times(2)$: $\frac{\sqrt{2}}{5}\le\frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{4x+1}}\le\frac{\sqrt{5}}{3}$ أي $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{5}\le\sqrt{\frac{-y}{4x+1}}\le\frac{\sqrt{5}}{3}}$

التمرين الثالث

1. لنحسب العدد S

لدينا $$S = 3\cos^2 37° - 4\sin^2 56° - 4\sin^2 34° + 3\cos^2 53°$$
أي $$S = 3\left(\cos^2 37° + \cos^2 53°\right) - 4\left(\sin^2 56° + \sin^2 34°\right)$$

ونعلم أن $\cos 53° = \sin 37°$ (لأنهما زاويتان متتامتان) أي $\cos^2 53° = \sin^2 37°$
و $\sin 34° = \cos 56°$ (لأنهما زاويتان متتامتان) أي $\sin^2 34° = \cos^2 56°$

إذن
$$\boxed{\begin{array}{l} S = 3\left(\cos^2 37° + \sin^2 37°\right) - 4\left(\sin^2 56° + \cos^2 56°\right) \\ S = 3\times 1 - 4\times 1 = -1 \end{array}}$$

2. لدينا $$a = \cos x + \sin x$$
أي $$a^2 = \left(\cos x + \sin x\right)^2$$
أي $$a^2 = \cos^2 x + 2\cos x \times \sin x + \sin^2 x$$
أي $$a^2 = \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1} + 2\cos x \times \sin x$$
أي $$a^2 = 1 + 2\cos x \times \sin x$$
أي $$a^2 - 1 = 2\cos x \times \sin x$$
أي $$(a-1)(a+1) = 2\cos x \times \sin x$$
إذن $$\boxed{\cos x \times \sin x = \frac{(a-1)(a+1)}{2}}$$

التمرين الرابع

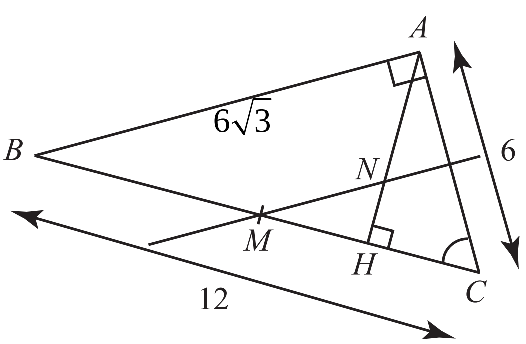
ABC مثلث بحيث $AB = 6\sqrt{3}$ و $AC = 6$ و $BC = 12$

1. لنبين أن ABC مثلث قائم الزاوية في الرأس A.

لنقارن BC^2 و $AC^2 + AB^2$: $BC^2 = 12^2 = 144$ و $AC^2 + AB^2 = 6^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 = 36 + 108 = 144$

إذن $BC^2 = AC^2 + AB^2$ و حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن ABC مثلث قائم الزاوية في الرأس A.

2. الشكل : السلم $e = 0{,}5$



3. لنحسب النسب المثلثية للزاوية $\widehat{C}$:

$$\cos \widehat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$
$$\sin \widehat{C} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan \widehat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$$

بما أن $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (حسب المعطيات) و $\sin\widehat{C} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن $\widehat{C} = 60°$

4. النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

أ. لدينا في المثلث AHC قائم الزاوية في الرأس H : $\cos\widehat{C} = \frac{CH}{AC}$ أي $CH = AC \times \cos\widehat{C}$

تطبيق عددي : $\boxed{CH = 6 \times \frac{1}{2} = 3}$

ب. لنبين أن $AH = 3\sqrt{3}$

o **الطريقة 1** : استعمال $\sin\widehat{C}$ في المثلث AHC : $\sin\widehat{C} = \frac{AH}{AC}$ أي $AH = AC \times \sin\widehat{C}$

تطبيق عددي : $\boxed{AH = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}}$

o **الطريقة 2** : تطبيق مبرهنة فيتاغورس المباشرة في المثلث AHC :

لدينا AHC مثلث قائم الزاوية في الرأس H، إذن ح.م.ف.م : $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2}$

تطبيق عددي : $\boxed{AH = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}}$

5.

أ. لدينا $MC = MH + HC$ أي $MH = MC - HC$

تطبيق عددي : $\boxed{MH = HM = 6 - 3 = 3}$

لنبين أن $MN = 2\sqrt{3}$:

✓ <u>الطريقة الأولى</u> : تطبيق مبرهنة طاليس المباشرة في المثلث HAB

في المثلث HAB لدينا $N \in [HA]$ و $M \in [HB]$ بحيث $(MN)//(AB)$

إذن ح.م.ط.م : $\frac{HM}{HB} = \frac{MN}{AB}$ أي $MN = \frac{HM \times AB}{HB}$

تطبيق عددي : $\boxed{MN = \frac{3 \times 6\sqrt{3}}{9} = \frac{18\sqrt{3}}{9} = 2\sqrt{3}}$

✓ <u>الطريقة الثانية</u> : نستعمل $\cos\widehat{NMH}$

لنُحدد أولا قياس الزاوية $\widehat{NMH}$: لدينا $(MN)//(AB)$ و (BM) قاطع لهما.

إذن $\widehat{NMH} = \widehat{ABC} = 30°$ (لأنهما زاويتان متناظرتان)

إذن $\cos\widehat{NMH} = \frac{MH}{MN}$ أي $MN = \frac{MH}{\cos\widehat{NMH}}$. $\left(\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

تطبيق عددي : $MN = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

✓ <u>الطريقة الثالثة</u> : في المثلث MNH قائم الزاوية في الرأس H لدينا $\tan\widehat{NMH} = \frac{NH}{MH}$

أي $NH = MH \times \tan\widehat{NMH}$ أي $NH = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

وبتطبيق مبرهنة فيتاغورس المباشرة في المثلث MNH :

$$MN = \sqrt{MH^2 + HN^2} = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

ب. لنحدد قياس الزاوية $\widehat{HAB}$:

لدينا $\widehat{BAC}=\widehat{BAH}+\widehat{HAB}$ أي $\widehat{BAH}=\widehat{BAC}-\widehat{HAB}$

تطبيق عددي : $\widehat{BAH}=90°-30°=60°$

ج. لنبين أن المثلثين ACH و MNH متشابهان.

✓ الطريقة الأولى

لدينا : $\widehat{MHN}=\widehat{AHC}=90°$ (3)

ولدينا $(MN)//(AB)$ و (AH) قاطع لهما، إذن $\widehat{MNH}=\widehat{BAH}=60°$ (لأنهما زاويتان متناظرتان). إذن $\widehat{MNH}=\widehat{ACH}$ (4)

ومن (3) و (4) نستنتج أن لمثلثين ACH و MNH متشابهان.

✓ الطريقة الثانية :

لنحدد الأضلاع المتناظرة للمثلثين ACH و MNH

A	C	H
M	N	H

لدينا $\widehat{MHN}=\widehat{AHC}=90°$ (5)، لنقارن $\dfrac{HN}{HC}$ و $\dfrac{HM}{HA}$:

$$(6)\begin{cases}\dfrac{HN}{HC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\[2mm]\dfrac{HM}{HA}=\dfrac{3}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

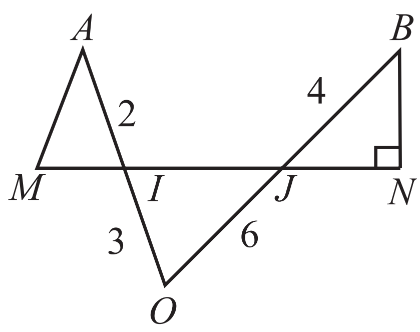
من (5) و (6) نستنتج أن لمثلثين ACH و MNH متشابهان.

د. من خلال جدول الأضلاع المتناظرة معامل التكبير هو $k=\dfrac{AH}{MH}$ (لأن $AH>MH$).

تطبيق عددي : $k=\dfrac{AH}{MH}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

التمرين الخامس

لنعتبر الشكل التالي :



1. لنحسب AM

لدينا المستقيمان (AO) و (MJ) متقاطعان في النقطة بحيث :

النقط A و I و O في نفس الترتيب مع النقط M و I و J

و $(AM)//(OJ)$ (لأن $J\in[OB]$).

إذن ح.م.ط.م : $\dfrac{AI}{IO}=\dfrac{AM}{OJ}$ أي $AM=\dfrac{OJ\times AI}{IO}$

تطبيق عددي : $\boxed{AM=\dfrac{6\times 2}{3}=4}$

لنحسب BN

نضع $BN=JN=a$. لدينا BJN مثلث قائم الزاوية في الرأس N، إذن ح.م.ف.م :

$BJ^2=BN^2+JN^2=a^2+a^2=2a^2$ إذن $16=2a^2$ أي $a^2=8$ إذن $\boxed{a=BN=\sqrt{8}=2\sqrt{2}}$

2. لنبين أن $(IJ)//(AB)$

لنعتبر المثلث OAB حيث $I\in[OA]$ و $J\in[OB]$

لنقارن $\dfrac{OI}{OA}$ و $\dfrac{OJ}{OB}$:

$$\begin{cases}\dfrac{OI}{OA}=\dfrac{2}{5}\\[2mm]\dfrac{OJ}{OB}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}\end{cases}$$ إذن $\dfrac{OI}{OA}=\dfrac{OJ}{OB}$

ومنه وحسب مبرهنة طاليس العكسية فإن $(IJ)//(AB)$