المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي

التدريب الثاني من 1 إلى 5 أبريل2011
الفرض الأول (مدة الإنجاز 4 ساعات)

أولمبياد الرياضيات 2011

Exercice 1(Macedonian MO 2010)

Résoudre dans l'ensemble des entiers l'équation suivante :

$x^3 + 2y^3 - 4x - 5y + z^2 = 2012$

التمرين 1

حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة التالية :

$x^3 + 2y^3 - 4x - 5y + z^2 = 2012$

Exercice 2 (Eotvos competition 1931,National CP Croatia 2010)

Soit $ABCDEF$ un hexagone tel que : $(AB) \perp (BC)$, $(AC) \perp (CD)$, $(AD) \perp (DE)$ et $(AE) \perp (EF)$.On suppose que les longueurs des côtés de l'hexagone sont des entiers strictement positifs. Montrer que ces entiers ne sont pas tous impairs.

التمرين 2

ليكن $ABCDEF$ مسدسا بحيث : $(AB) \perp (BC)$ و $(AC) \perp (CD)$ و $(AD) \perp (DE)$ و $(AE) \perp (EF)$.

نفترض أن قياسات أضلاع المسدس أعداد صحيحة موجبة قطعا .

بين أن هذه الأعداد ليست كلها فردية.

Exercice 3 (National CP Croatia 2010 , Colombia 2009)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n)f(-n) = f(n^2)$

b) $\forall n,m \in \mathbb{Z} \quad f(n+m) = f(n) + f(m) + 2nm$

التمرين 3

حدد جميع الدوال $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ التي تحقق الشرطين :

a) $f(n)f(-n) = f(n^2)$ لكل n من $\mathbb{Z}$

b) $f(n+m) = f(n) + f(m) + 2nm$ لكل n و m من $\mathbb{Z}$.

Exercice 4 (New Problems in Euclidean Geometry David Monk)

Les hauteurs BF et CE d'un triangle ABC se coupent en H .

Les droites (BC) et (FE) se coupent en U .

La parallèle, à la bissectrice intérieure de l'angle $\angle EUB$ et passant par le milieu L du segment $[BC]$, coupe $[AC)$, $[AB)$,$[HC)$ et $[HB)$ en P ,Q ,X et Y respectivement.

Montrer que les rayons des cercles circonscrits aux triangles APQ et HXY sont égaux.

التمرين 4

الارتفاعان BF و CE في المثلث ABC يتقاطعان في النقطة H.

المستقيمان (BC) و (FE) يتقاطعان في النقطة U.

الموازي للمنصف الداخلي للزاوية $\angle EUB$ المار من L منتصف القطعة $[BC]$ يقطع $[AC)$ و $[AB)$ و $[HC)$ و $[HB)$ في P و Q و X و Y على التوالي.

بين أن شعاعي الدائرتين المحيطتين بالمثلثين APQ و HXY متساويان.