

## OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

2010

1 / 1

### Exercice 1 ( Indian Mathematical Olympiad 2009 )

Soient  $a, b$  et  $c$  des réels strictement positifs tels que  $a^3 + b^3 = c^3$   
Montrer que :  $a^2 + b^2 - c^2 > 6(c - a)(c - b)$ .

### Exercice 2 ( Iran Math Olympiad 2007 )

Trouver tous les polynômes  $P$  dont les coefficients sont des entiers tels que pour tous les entiers strictement positifs  $a, b$  etc.,  $P(a) + P(b) + P(c)$  est divisible par  $a + b + c$ .

**Exercice 3**  
 $k$  un entier naturel donné et  $x, y$  et  $z$  des réels strictement positifs tels que  $x + y + z = 1$

Démontrer que :

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1} + y^k + z^k} + \frac{y^{k+2}}{y^{k+1} + z^k + x^k} + \frac{z^{k+2}}{z^{k+1} + x^k + y^k} \geq \frac{1}{7}$$

Quand obtient-on l'égalité ?

### Exercice 4

Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = AC$  et soit  $(\Gamma)$  son cercle circonscrit. on suppose que le cercle  $(\gamma)$  inscrit au triangle  $ABC$  se déplace sur  $(BC)$  dans la direction de  $B$ .  
Montrer que quand  $(\gamma)$  est tangent intérieurement au cercle  $(\Gamma)$  il est aussi tangent à la hauteur du triangle  $ABC$  issue de  $A$ .

التدريج الشفهي (من 26 إلى 30 مارس)  
اللفرض الثالث ( 8h30 – 12h30 )

**أولمبياد الرياضيات**  
**للمواهبة والابداع**

**2010**

**التمرين 1**  
 أوجد جميع الدوال الحدودية التي معاملاتها أعداد صحيحة بحيث لم يكن  $a$  و  $b$  و  $c$  أعدادا حقيقة موجبة قطعا بحسب  $a^3 + b^3 = c^3$   
مهما تكن الأعداد الصحيحة الموجبة قطعا  $a$  و  $b$  و  $c$  ،  
يقبل القسمة على  $a + b + c$  .  
 $a^2 + b^2 - c^2 > 6(c - a)(c - b)$

**التمرين 2**  
 أوجد جميع الدوال الحدودية التي معاملاتها أعداد صحيحة بحيث مهما تكن الأعداد الصحيحة الموجبة قطعا  $a$  و  $b$  و  $c$  ،  
يقبل القسمة على  $a + b + c$  .  
 $P(a) + P(b) + P(c) > P(a) + P(b) + P(c)$

**التمرين 3**  
 عدد صحيح طبيعي معلوم و  $x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقة موجبة قطعا بحيث  $x + y + z = 1$  :  
 $\frac{x^{k+2}}{x^{k+1} + y^k + z^k} + \frac{y^{k+2}}{y^{k+1} + z^k + x^k} + \frac{z^{k+2}}{z^{k+1} + x^k + y^k} \geq \frac{1}{7}$   
 متى نحصل على التساوي ؟

**التمرين 4**  
 ليكين  $M$  مثلث بحيث  $AB = AC$  و  $(\Gamma)$  الدائرة المحيطة بهذا المثلث تتحرك على  $ABC$ . نفترض أن الدائرة  $(\gamma)$  المحاطة بهذا المثلث تتحرك على المستقيم  $(BC)$  في اتجاه النقطة  $B$ .  
 بين أنه عندما تكون الدائرة  $(\gamma)$  مماسة داخليا للدائرة  $(\Gamma)$  فإن  $(\gamma)$  تكون كذلك مماسة لارتفاع المثلث  $ABC$  المنشأ من  $A$ .

