OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES 2010	الثانية علوم رياضية (الفرض الرابع) الجمعة 5 مارس 2010 (17h30 - 14h30)	أولمبياد الرياضيات 2010

Exercice 1(Macedonian MC)

Résoudre le système :

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y + \cos^2 z = 2 \end{cases} \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

التمرين 1

حل النظمة :

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y + \cos^2 z = 2 \end{cases} \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

Soient x, y, z et t des nombres réels strictement positifs tels que : $x + y + z + t = 1$.

Montrer que : $6\left(x^3 + y^3 + z^3 + t^3\right) \geq x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + \frac{1}{8}$

التمرين 2

لتكن x و y و z و t أعدادا حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x + y + z + t = 1$

بين أن : $6\left(x^3 + y^3 + z^3 + t^3\right) \geq x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + \frac{1}{8}$

Exercice 3

Soit n entier naturel, on désigne par $u(n)$ le plus grand entier premier inferieur ou égal à n et par $v(n)$ le plus petit entier premier supérieur strictement à n.

On pose :

$$S = \frac{1}{u(2)v(2)} + \frac{1}{u(3)v(3)} + \frac{1}{u(4)v(4)} + \ldots + \frac{1}{u(2010)v(2011)}$$

Montrer que : $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2011}$

التمرين 3

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا، نرمز ب $u(n)$ لأكبر عدد أولي أصغر أو يساوي n و ب $v(n)$ لأصغر عدد أولي أكبر قطعا من n.

نضع :

$$S = \frac{1}{u(2)v(2)} + \frac{1}{u(3)v(3)} + \frac{1}{u(4)v(4)} + \ldots + \frac{1}{u(2010)v(2011)}$$

بين أن : $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2011}$

Exercice 4

Soit ABC un triangle dont les longueurs des côtés sont des entiers. La bissectrice intérieure de l'angle $B\widehat{A}C$ coupe le côté $[BC]$ en D. Sachant que $AC = 2007$ et $AB = CD$ déterminer les longueurs des côtés $[AB]$ et $[BC]$.

التمرين 4

ليكن ABC مثلثا أطوال أضلاعه أعداد صحيحة . المنصف الداخلي للزاوية $B\widehat{A}C$ يقطع الضلع $[BC]$ في النقطة D.

علما أن $AC = 2007$ و $AB = AC$ حدد طولي الضلعين $[AB]$ و $[BC]$.