OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES 2010 — 1 / 1	(الفرض السادس) الثانية علوم رياضية — الجمعة 7 ماي 2010 (17h30 - 14h30)	أولمبياد الرياضيات 2010

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul tel que $n+1$ soit divisible par 24.

a) Montrer que le nombre de diviseurs de n est pair.

b) Montrer que la somme de tous les diviseurs de n est divisible par 24.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul.

Trouver le plus grand commun diviseur des nombres :

$C_{2n}^{1}\ ,\ C_{2n}^{3}\ ,\ C_{2n}^{5}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ C_{2n}^{2n-1}$.

Exercice 3

n joueurs participent à un tournoi de tennis. Chaque paire de joueurs dispute un match exactement. Pour tout joueur i $(1 \le i \le n)$ on désigne par x_i le nombre de ses victoires et par y_i le nombre de ses défaites.

Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}$.

Exercice 4

On considère un demi- cercle (Γ) de centre O et de diamètre $[AB]$. Une droite rencontre (AB) en M et (Γ) en C et D tels que $MB < MA$ et $MD < MC$.

Les cercles circonscrits aux triangles AOC et BOD se coupent une deuxième fois en K .Démontrer que les droites (MK) et (KO) sont perpendiculaires.

التمرين 1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم بحيث يكون $n+1$ قابلا للقسمة على 24.

أ) بين أن عدد قواسم n زوجي .

ب) بين أن مجموع قواسم n قابل للقسمة على 24.

التمرين 2

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد :

C_{2n}^{1} و C_{2n}^{3} و C_{2n}^{5} و..... و C_{2n}^{2n-1} .

التمرين 3

يشارك في دوري لكرة المضرب n لاعبا .

كل لاعبين يتقابلان مرة واحدة بالضبط . بالنسبة لكل لاعب i $(1 \le i \le n)$ نسمي x_i عدد انتصاراته و y_i عدد هزائمه.

بين أن $\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}$.

التمرين 4

نعتبر نصف دائرة (Γ) مركزها O وقطرها $[AB]$ و مستقيما يقطع (AB) في M و (Γ) في C و D بحيث $MB < MA$ و $MD < MC$. الدائرتان المحيطتان بالمثلثين AOC و BOD تتقطعان مرة ثانية في K .

بين أن المستقيمين (MK) و (KO) متعامدان.